E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

SOLUSI ANALITIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL LINIER DENGAN ORDE FRAKSIONAL BERBEDA MELALUI TRANSFORMASI LAPLACE

Rohasnita. Z[1*], Erdawati Nurdin[2]

[1,2] Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, Indonesia
*Korespondensi: Email:12210524536@students.uin-suska.ac.id

Abstrak

Persamaan diferensial fraksional merupakan perluasan dari persamaan diferensial klasik yang memungkinkan orde turunan berupa bilangan riil, sehingga relevan untuk memodelkan sistem yang memiliki sifat memori dan hereditar. Artikel ini bertujuan untuk memperoleh solusi analitik sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde fraksional yang berbeda pada setiap variabel. Kontribusi utama penelitian ini adalah perumusan solusi analitik sistem persamaan diferensial fraksional linier orde berbeda menggunakan transformasi Laplace dengan turunan fraksional Caputo. Melalui penerapan transformasi Laplace, sistem diferensial fraksional diubah menjadi sistem aljabar dalam domain transformasi yang dapat diselesaikan secara sistematis menggunakan kaidah Cramer, kemudian dikembalikan ke domain waktu melalui invers transformasi Laplace. Beberapa contoh disajikan untuk mengilustrasikan efektivitas pendekatan yang diusulkan. Secara matematis, hasil penelitian ini memberikan kerangka analitik yang terstruktur untuk penyelesaian sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde berbeda dan dapat menjadi dasar bagi pengembangan teori maupun aplikasi lanjutan pada sistem dinamik fraksional.

Kata kunci: *Persamaan Diferensial Fraksional, Transformasi Laplace, Solusi Analitik.*

PENDAHULUAN

Sistem persamaan diferensial memainkan peran penting dalam menggambarkan berbagai fenomena dinamika pada bidang sains, teknik, dan ekonomi. Dalam banyak sistem nyata, dinamika perilaku tidak hanya ditentukan oleh keadaan saat ini, tetapi juga dipengaruhi oleh riwayat keadaannya. Karakteristik ini dikenal sebagai efek memori atau hereditar dan sering muncul pada sistem dengan interaksi nonlokal dalam waktu. Persamaan diferensial fraksional merupakan generalisasi dari persamaan diferensial klasik yang memungkinkan orde turunan berupa bilangan riil positif. Keunggulan utama pendekatan fraksional terletak pada kemampuannya merepresentasikan efek memori secara lebih akurat dibandingkan model berorde bulat. Oleh karena itu, sistem persamaan diferensial fraksional banyak digunakan dalam pemodelan dinamika kompleks, seperti anomali difusi, sistem viskoelastik, dan sistem kontrol fraksional. Dalam artikel ini, perhatian difokuskan pada sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde pecahan yang berbeda pada setiap variabel. Perbedaan orde pecahan tersebut mencerminkan heterogenitas dinamika memori dalam komponen sistem,

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

sehingga menuntut pendekatan analitik yang sistematis untuk memperoleh solusi. Secara umum, bentuk matematis dari sistem persamaan diferensial linier dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D_t\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.1}$$

dimana $D_t = \dfrac{d}{dt}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Persamaan diferensial fraksional merupakan persamaan diferensial dengan orde riil positif. Dengan rincian komponen sebagai berikut:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Vektor ini menyatakan keadaan sistem pada waktu t, di mana notasi $(.)^T$ menunjukkan bahwa $x(t)$ adalah vektor kolom yang terdiri dari variabel-variabel dependen sistem. Kemudian

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Vektor ini merepresentasikan masukan luar, kendali, atau gangguan eksternal yang memengaruhi dinamika sistem. Selanjutnya

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn}$$

Matriks ini merupakan matriks konstanta riil yang merepresentasikan hubungan linier dan interaksi antar variabel keadaan dalam sistem.

Sistem persamaan diferensial linier klasik pada Persamaan (1.1) merupakan fondasi utama dalam analisis dinamika sistem. Dalam perkembangannya, sistem ini digunakan sebagai kerangka dasar untuk membangun sistem persamaan diferensial fraksional (pecahan). Perubahan mendasar terjadi pada operator turunan D_t, di mana orde turunan bilangan bulat (n = 1) digeneralisasi menjadi orde riil positif memenuhi
α_i $\quad 0 < \alpha_i \leq 1$. Generalisasi ini memungkinkan sistem untuk menangkap fenomena, di mana perubahan variabel pada waktu t tidak hanya dipengaruhi oleh kondisi saat ini, tetapi juga oleh seluruh riwayat masa lalu sistem. Sistem klasik tetap menjadi acuan penting karena pada saat semua orde $\alpha_i = 1$, sistem fraksional akan kembali menjadi sistem linier klasik. Oleh karena itu,

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

pemahaman mendalam terhadap matriks A dan struktur vektor masukan $u\ (t)$ pada model klasik sangat krusial sebelum melakukan ekspansi ke domain kalkulus fraksional.
Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial fraksional linier adalah sebagai berikut:

$$D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (1.2)$$

dimana $D_t^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$ menyatakan operator turunan fraksional. Ada beberapa definisi dari operator turunan fraksional D_t^{α}. Salah satu yang cukup dikenal adalah operator turunan fraksional Caputo, yang didefinisikan sebagai:

$$D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^t \frac{D_{\tau}^{(k)}\mathbf{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-k}} d\tau \qquad (1.3)$$

dimana $k - 1 < \alpha < k, k \in \mathbb{N}$. Solusi dari sistem (1.2) dengan D_t^{α} adalah operator turunan Caputo telah diberikan dalam beberapa literatur.

Pada artikel ini, diselesaikan sistem persamaan diferensial fraksional (1.2) dalam artian $D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \left[D_t^{\alpha_1}x_1(t) \quad D_t^{\alpha_2}x_2(t) \cdots D_t^{\alpha_n}x_n(t)\right]^T$ dimana $D_t^{\alpha_i}, i = 1,2,\cdots,n$, α_i tak perlu sama dengan α_j untuk $j = 1,2,\cdots,n$ adalah operator turunan fraksional Caputo dengan menggunakan transformasi Laplace. Penelitian ini mengelaborasi dari yang telah diteliti oleh Odibat, M.Z [6].

Dalam beberapa dekade terakhir, sistem persamaan diferensial fraksional telah menarik perhatian besar karena kemampuannya dalam memodelkan efek memori dan sifat hereditas secara lebih akurat. Namun, perlu dicatat bahwa sebagian besar studi sebelumnya umumnya mengasumsikan penggunaan orde fraksional yang sama (α) untuk seluruh variabel dalam sistem (sistem homogen). Asumsi ini sering kali didasarkan pada upaya penyederhanaan analisis matematis. Berbeda dengan pendekatan tersebut, artikel ini mengkaji sistem dengan orde fraksional yang berbeda (α_i)pada setiap variabel keadaan. Hal ini didasari oleh realitas bahwa dalam sistem yang kompleks, setiap komponen sering kali memiliki karakteristik memori atau laju peluruhan yang tidak seragam. Sebagai contoh, dalam sistem biologi atau sirkuit listrik yang heterogen, satu variabel mungkin berubah dengan karakteristik orde(α_1), sementara variabel lainnya mengikuti orde (α_2).

Dalam artikel ini akan diselesaikan sistem persamaan diferensial fraksional orde berbeda yang berbentuk:

$$D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (1.4)$$

dengan $D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \left[D_t^{\alpha_1}x_1(t) \quad D_t^{\alpha_2}x_2(t) \quad \cdots \quad D_t^{\alpha_n}x_n(t)\right]^T,\ 0 < \alpha_i \leq 1$, dimana $D_t^{\alpha_i}, i = 1,2,\cdots,n$ adalah operator turunan fraksional Caputo dengan menggunakan transformasi Laplace.

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Penting untuk ditekankan bahwa dalam model ini, setiap komponen sistem memiliki orde fraksional yang dapat berbeda satu sama lain, di mana notasi α_i (untuk $i = 1, 2, \ldots, n$) akan digunakan secara konsisten di seluruh bagian artikel ini untuk merujuk pada orde fraksional dari masing-masing variabel keadaan. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk merumuskan solusi analitik pada sistem persamaan diferensial fraksional linier yang memiliki orde berbeda pada setiap variabel keadaannya. Kebaruan utama dalam penelitian ini terletak pada fokus heterogenitas orde fraksional (α_i), yang secara signifikan memberikan fleksibilitas lebih besar dalam memodelkan fenomena kompleks dibandingkan pendekatan orde tunggal (homogen) yang lazim ditemukan dalam berbagai literatur. Artikel ini memposisikan diri sebagai pengembangan dan pelengkap terhadap penelitian yang dilakukan oleh Odibat, di mana jika Odibat lebih menekankan pada aspek teoretis dasar sistem fraksional, artikel ini secara eksplisit menyajikan formulasi umum solusi sistem fraksional linier orde berbeda dengan mengintegrasikan metode transformasi Laplace dan aturan Cramer secara sistematis. Dengan demikian, diharapkan hasil penelitian ini dapat memberikan kerangka kerja matematis yang lebih aplikatif bagi para praktisi dalam menyelesaikan masalah dinamika sistem yang melibatkan variabel dengan karakteristik memori yang tidak seragam.

LANDASAN TEORI

Beberapa fungsi yang berperan penting dalam pembahasan sistem persamaan diferensial fraksional linier adalah fungsi Gamma, fungsi Beta dan fungsi Mittag-Leffler. Penyelesaian sistem ini melibatkan fungsi Mittag-Leffler sebagai generalisasi fungsi eksponensial, yang didukung oleh fungsi Gamma sebagai dasar perhitungan koefisien pada orde fraksional. Kombinasi keduanya memungkinkan representasi solusi analitik yang akurat dalam menangkap dinamika sistem yang memiliki efek memori.

Definisi 2.1. [5] *Fungsi Gamma dinyatakan sebagai* $\Gamma(n)$*, didefinisikan sebagai*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x} \ dx, \quad n > 0$$

.

Definisi 2.2. [5] *Fungsi Beta didefinisikan sebagai*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \ x \in \mathbb{R}$$ *dan* $p,q \in$ R*,*

dimana $p > 0$ *dan* $q > 0$*.*

Definisi 2.3. [2] *Fungsi Mittag-Leffler satu parameter didefinisikan sebagai*

$$E_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k+1)}$$

dimana $\lambda > 0$ *dan* $z \in$ C*.*

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Definisi 2.4. [2] *Fungsi Mittag-Leffler dua parameter didefinisikan sebagai*

$$E_{\lambda,\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k+\rho)},$$

dengan $\lambda > 0$, $\rho > 0$ *dan* $z \in \mathbb{C}$.

Untuk turunan dari fungsi Mittag-Leffler, berlaku

$$D_z^{(m)} E_{\lambda,\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!z^k}{k!\Gamma(\lambda(k+m)+\rho)} \tag{2.1}$$

Kaidah Cramer adalah metode aljabar linier yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier B_x = L menggunakan determinan. Dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial fraksional, kaidah ini menjadi instrumen krusial setelah dilakukan transformasi Laplace.

Transformasi Laplace mengubah operator turunan fraksional yang kompleks menjadi pangkat aljabar dalam domain *-s*. Akibatnya, sistem diferensial berubah menjadi sistem persamaan aljabar linier dalam bentuk B(s)X(s) = L(s). Kaidah Cramer memungkinkan penyelesaian variabel $X_j(s)$ secara individual tanpa harus melakukan inversi matriks seluruhnya.

Penggunaan Kaidah Cramer bukan sekadar alat bantu hitung, melainkan jembatan metodologis yang memungkinkan sistem fraksional yang heterogen diubah menjadi solusi analitik yang terstruktur, yang pada akhirnya mempermudah penentuan ekspresi solusi dalam domain waktu menggunakan fungsi Mittag-Leffler.

Dalam artikel ini metode yang digunakan adalah kaidah Cramer. Kaidah ini digunakan karena memungkinkan penentuan solusi sistem persamaan aljabar secara eksplisit ketika koefisien matriks bersifat non-singular, sehingga mendukung perumusan solusi analitik sistem persamaan diferensial fraksional hasil transformasi Laplace.
Implementasi metode ini diberikan berikut ini

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.2}$$

dimana $A_{n\times n}$ adalah matriks non singular dengan

ax$_1$b ab$_1$c
xn bn

Jika det A 6= 0, solusi dari (2.2) diberikan sebagai berikut

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

dimana A_i adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti kolom ke-i matriks A dengan vektor **b.**
Turunan biasa yang biasa kita kenal memiliki orde turunan dalam bentuk bilangan bulat positif. Dalam artikel ini akan diperkenalkan turunan fraksional yang ordenya dalam bentuk bilangan riil positif berupa pecahan. Salah satu turunan fraksional yang digunakan yaitu turunan fraksional yang dikembangkan oleh Caputo menggunakan transformasi Laplace.

Definisi 2.5. [5] *Misalkan* $f(t)$ *adalah fungsi sedemikian sehingga* $D_t^{(k)} f(t)$ *ada. Turunan fraksional Caputo orde* α *dari fungsi* $f(t)$ *didefinisikan sebagai*

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^t \frac{D_\tau^{(k)} f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-k}}$$

dengan $k - 1 < \alpha < k, k \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.6. [4] *Misalkan* $f(t)$ *adalah suatu fungsi dari t. Transformasi Laplace dari* $f(t)$, *dinyatakan dengan F(s) atau* $\mathcal{L}[f(t)]$, *didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \; s \in \mathbb{C} \quad , \tag{2.3}$$

asalkan integral tersebut ada.

Definisi 2.7. [8] *Konvolusi dari dua buah fungsi yang kontinu* $f(t)$ *dan* $g(t)$ *didefinisikan sebagai berikut*

$$t\, f(t) * g(t) = \int_0^\infty f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

*dimana simbol * menyatakan operator konvolusi.*

Teorema 2.8. [5] *Jika transformasi Laplace dari fungsi* $f(t)$ *dan* $g(t)$ *adalah* $F(s)$ *dan* $G(s)$ *maka*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)\; g(\tau)\; d\tau\right] = F(s)G(s)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)\; g(\tau)\; d\tau\right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t-\tau)\; g(\tau)\; d\tau\right]\; e^{-st} dt, \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)\; g(\tau)\; e^{-st}\; d\tau\; dt, \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)\; g(\tau)\; e^{-s(t-\tau+\tau)} d\tau\; dt, \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)\; g(\tau)\; e^{-s(t-\tau)}\; e^{-s\tau}\; d\tau\; dt, \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)\; e^{-s(t-\tau)}\; d(t-\tau)\; g(\tau)\; e^{-s\tau}\; d\tau, \\
&= \int_0^\infty f(t-\tau)\; e^{-s(t-\tau)}\; d(t-\tau) \int_0^\infty g(\tau)\; e^{-s\tau}\; d\tau.
\end{aligned}$$

Misalkan $a = t - \tau$, maka

∬ t ∬ ∞ ∬ ∞
Z Z Z
∬ $f(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau$ =∬ $f(a)\, e^{-sa}\, da$ ∬ $g(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau$

$= F(s)G(s)$

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Teorema 2.9. [8] *Misalkan* L[*f*(*t*)] = *F*(*s*) *dan* D_t^α *adalah operator turunan fraksional Caputo, maka*

m
L[*Dtαf*(*t*)] = *sαF*(*s*) − X*s*(*α*−*k*)*Dt*(*k*−1)*f*(0).
k=1

Bukti.

$$\mathcal{L}\left[D_t^\alpha f(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{D_\tau^{(m)} f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}\right],$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{D_\tau^{(m)} f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}\right],$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} D_\tau^{(m)} f(\tau)d\tau\right].$$

Dengan menggunakan Teorema 2.8 diperoleh

$$\mathcal{L}\left[D_t^\alpha f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\mathcal{L}\left[t^{m-\alpha-1}\right]\mathcal{L}\left[D_t^{(m)} f(t)\right],$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{s^{m-\alpha}}\left[s^m F(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{(m-k)} D_t^{(k-1)} f(0)\right]$$

$$= \frac{1}{s^{m-\alpha}}\left[s^m F(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{(m-k)} D_t^{(k-1)} f(0)\right],$$

$$= s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{(\alpha-k)} D_t^{(k-1)} f(0).$$

, □

Teorema 2.10. [9] *Transformasi Laplace dari perkalian fungsi* $t^{(\lambda m+\rho-1)} D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^\lambda)$ *adalah*

$$\mathcal{L}\left[t^{(\lambda m+\rho-1)} D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^\lambda)\right] = \frac{m! s^{\lambda-\rho}}{(s^\lambda - a)^{m+1}}, \quad s^\lambda \neq a.$$

Bukti. Bukti teorema ini menggunakan formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} x^k = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \qquad (2.4)$$

yang buktinya akan diberikan kemudian. Dari formula (2.1) diperoleh

$$D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{(at^\lambda)^k}{\Gamma(\lambda k + \lambda m + \rho)} \qquad (2.5)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{(\lambda m+\rho-1)} D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^{\lambda})\right] &= \int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{(\lambda m+\rho-1)}\ D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^{\lambda}) dt, \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{(\lambda m+\rho-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{(at^{\lambda})^k}{\Gamma(\lambda k+\lambda m+\rho)} dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k+\lambda m+\rho)} \int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{(\lambda k+\lambda m+\rho-1)} dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k+\lambda m+\rho)}\ \mathcal{L}\left[t^{(\lambda k+\lambda m+\rho-1)}\right], \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k}{\Gamma(\lambda k+\lambda m+\rho)} \frac{\Gamma(\lambda k+\lambda m+\rho)}{s^{\lambda k+\lambda m+\rho}}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!a^k}{k!s^{\lambda k+\lambda m+\rho}}, \\
&= s^{-(\lambda m+\rho)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!(as^{-\lambda})^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{(\lambda m+\rho-1)} D_t^{(m)} E_{\lambda,\rho}(at^{\lambda})\right] &= s^{-(\lambda m+\rho)} \frac{m!}{(1-as^{-\lambda})^{m+1}}, \\
&= s^{-(\lambda m+\rho)}\ s^{\lambda(m+1)} \frac{m!}{(s^{\lambda}-a)^{m+1}} \\
&= \frac{m!s^{\lambda-\rho}}{(s^{\lambda}-a)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

,

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} x^k = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}.$$

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad (2.6)$$

Dan

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r C_{(n+r-1,r)}. \qquad (2.7)$$

Misalkan:

$f(x) = (1 + x)^m$, maka $f(x) = (1 + x)^m \rightarrow f(0) = 1$,
$D_x f(x) = m(1 + x)^{m-1} \rightarrow D_x f(0) = m$,
$D_x^2 f(x) = m(m-1)(1 + x)^{m-2} \rightarrow D_x^2 f(0) = m(m-1)$, $D_x^3 f(x) = m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3} \rightarrow D_x^3 f(0) = m(m-1)(m-2)$.
Dengan menggunakan Deret Maclaurin, yaitu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} D_x f(0) + \frac{x}{2!} D_x^2 f(0) + \frac{x}{3!} D_x^3 f(0) + \cdots,$$

diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x}{1!}m + \frac{x^2}{2!}m(m-1) + \frac{x^3}{3!}m(m-1)(m-2) + \cdots, \\ &= x^0 + mx + \frac{x^2}{2!}m(m-1)\frac{(m-2)!}{(m-2)!} + \frac{x^3}{3!}m(m-1)(m-2)\frac{(m-3)!}{(m-3)!} + \cdots \\ &= x^0 + mx + \frac{m!}{2!(m-2)!}x^2 + \frac{m!}{3!(m-3)!}x^3 + \cdots, \\ &= \binom{m}{0}x^0 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots, \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k. \end{aligned}$$

,

Kemudian,

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= \frac{(-n)!}{r!(n-r)!}, \\ &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-(r-1))(-n-r)!}{r!(-n-r)!} \\ &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}, \\ &= \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}, \\ &= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n}{r!}, \\ &= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n}{r!}\frac{(n-1)!}{(n-1)!}, \\ &= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-1)!}, \\ &= (-1)^r\binom{n+r-1}{r}, \\ \binom{-n}{r} &= (-1)^r C_{(n+r-1,r)}. \end{aligned}$$

,

Dari persamaan (2.6) dan (2.7) diperoleh:

$$\begin{aligned} (1+x)^{-m} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}x^k, \\ (1-x)^{-m} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}(-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}x^k, \\ (1-x)^{-(m+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{(m+1)+k-1}{k}x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}x^k. \end{aligned}$$

,

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{(m+1)}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}x^k,\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{(m+k-k)!k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{m!k!}x^k,\\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{k!}x^k,\\ \frac{m!}{(1-x)^{(m+1)}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{k!}x^k.\end{aligned}$$

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Perhatikan kembali sistem persamaan (1.4). Misalkan
Persamaan (1.4) dapat ditulis menjadi (3.1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

Dengan syarat awal:

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ \ldots,\ x_n(0) = x_{n0}.$$

Dengan melakukan transformasi Laplace pada (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} s^{\alpha_1}X_1(s) - s^{\alpha_1-1}x_1(0) &= a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \cdots + a_{1n}X_n(s),\\ s^{\alpha_2}X_2(s) - s^{\alpha_2-1}x_2(0) &= a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \cdots + a_{2n}X_n(s),\\ &\vdots\\ s^{\alpha_n}X_n(s) - s^{\alpha_n-1}x_n(0) &= a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \cdots + a_{nn}X_n(s).\end{aligned}$$

Kemudian dapat ditulis dalam bentuk matriks:
B(s) X(s) = L(s),
dengan:

$$B(s) = \begin{bmatrix} a_{11}-s^{\alpha_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s^{\alpha_2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-s^{\alpha_n}\end{bmatrix}$$

Dengan melakukan transformasi Laplace pada (3.2), diperoleh:

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ \cdots,\ x_n(0) = x_{n0}.$$

E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Misalkan $B(s)$ adalah matriks non singular, maka dengan menggunakan aturan Cramer, diperoleh

$$X_j(s) = \frac{\det(B_j(s))}{\det(B(s))}, \text{ untuk } j = 1,2,\cdots,n \quad (3.6)$$

dimana $B_j(s)$ adalah matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom ke-j dari matriks $B(s)$ dengan vektor $\mathbf{L}(s)$. Dari persamaan (3.6) diperoleh

$$x_j(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\det(B_j(s))}{\det(B(s))}\right], j = 1,2,\cdots,n. \quad (3.7)$$

Proses pencarian solusi analitik ini dimulai dengan menerapkan transformasi Laplace pada setiap komponen sistem untuk mengonversi operator diferensial fraksional menjadi ekspresi aljabar dalam domain *-s*. Setelah transformasi dilakukan, persamaan-persamaan tersebut disusun ke dalam sebuah sistem matriks karakteristik yang memisahkan variabel keadaan dari parameter input dan kondisi awalnya. Melalui representasi matriks ini, aturan Cramer kemudian diterapkan sebagai instrumen utama untuk mengisolasi setiap variabel secara eksplisit, sehingga memudahkan identifikasi bentuk determinan yang siap untuk diinversi kembali ke domain waktu.

Contoh 3.1. Tentukan solusi dari sistem

$$\begin{bmatrix} D_t^{1/2}x(t) \\ D_t^{1/3}y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

dimana $a \in \mathrm{R}$.

Berdasarkan solusi yang diperoleh pada Contoh 3.1, terdapat beberapa poin penting mengenai perilaku sistem yang dipengaruhi oleh penggunaan orde fraksional:

1. Karakteristik Solusi Mittag-Leffler: Berbeda dengan sistem diferensial orde bulat yang menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi eksponensial, sistem ini menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi tipe Mittag-Leffler. Fungsi ini secara matematis menjembatani perilaku antara peluruhan eksponensial (ketika $\alpha \to 1$) dan peluruhan hukum pangkat atau *power-law* (ketika $\alpha \to 0$).
2. Efek Memori dan Hereditas: Penggunaan turunan Caputo dengan orde $0 < \alpha_i \leq 1$ menunjukkan adanya sifat non-lokalitas. Artinya, nilai variabel keadaan pada waktu t tidak hanya ditentukan oleh kondisi sesaat, tetapi juga dipengaruhi oleh akumulasi riwayat masa lalu sistem. Semakin kecil nilai α_i, semakin kuat pengaruh "ingatan" sistem tersebut terhadap perilaku dinamikanya.
3. Fleksibilitas Dinamika: Dengan adanya variasi orde α_1 dan α_2 pada variabel yang berbeda, sistem menunjukkan tingkat fleksibilitas yang lebih tinggi. Variabel dengan orde yang lebih rendah akan mengalami perubahan transien yang lebih lambat namun memiliki efek peluruhan jangka panjang yang lebih persisten dibandingkan variabel dengan orde yang lebih tinggi. Hal ini membuktikan bahwa model fraksional mampu menangkap

E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

kompleksitas sistem nyata yang tidak dapat diakomodasi oleh model linear klasik.

Dengan menerapkan transformasi Laplace terhadap persamaan (3.8), diperoleh:

$$-s^{-1/2}x(0) = (\frac{1}{8} - s^{1/2})X(s), \quad (3.9)$$
$$-s^{-2/3}y(0) = aX(s) - (1 + s^{1/3})Y(s) \quad (3.10)$$

Persamaan (3.9) dan (3.10) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} -s^{-1/2}x(0) \\ -s^{-2/3}y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - s^{1/2} & 0 \\ a & -1 - s^{1/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}.$$

Maka:

$$X(s) = \frac{s^{-1/2}}{s^{1/2} - \frac{1}{8}} x_0 .$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh:

$$x(t) = E_{1/2,1}\left(\frac{1}{8}t^{1/2}\right)x_0 .$$

Selanjutnya,

$$Y(s) = a\frac{s^{-1/2}}{\left(s^{1/2} - \frac{1}{8}\right)(s^{1/3} + 1)}x_0 + \frac{s^{-2/3}}{(s^{1/3} + 1)}y_0$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh:

$$\begin{aligned} y(t) = at^{-1/3}\Bigg[&\frac{16}{15}E_{1/6,2/3}\left(\frac{1}{2}t^{1/6}\right) - \frac{40 - 24\sqrt{3}i}{39}E_{1/6,2/3}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{4}t^{1/6}\right) \\ &- \frac{40 + 24\sqrt{3}i}{39}E_{1/6,2/3}\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{4}t^{1/6}\right) + \frac{32 - 4i}{65}E_{1/6,2/3}(-it^{1/6}) \\ &+ \frac{32 + 4i}{65}E_{1/6,2/3}(it^{1/6})\Bigg]x_0 + E_{1/3}(-t^{1/3})y_0. \end{aligned}$$

Contoh 3.2. Tentukan solusi dari sistem

$$\begin{bmatrix} D_t x(t) \\ D_t^{1/2} y(t) \\ D_t^{1/2} z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Hasil penyelesaian pada Contoh 3.2 menunjukkan fenomena unik di mana setiap variabel keadaan $x_i(t)$memiliki perilaku dinamik yang berbeda meskipun berada dalam satu sistem matriks yang sama. Perbedaan karakter ini disebabkan secara langsung oleh variasi orde fraksional α_i:

1. Kecepatan Respon Transien
   Variabel dengan orde α_i yang lebih kecil cenderung menunjukkan perubahan yang sangat tajam pada awal waktu ($t \to 0$), namun kemudian

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

mengalami perlambatan laju perubahan. Sebaliknya, variabel dengan orde yang mendekati 1 menunjukkan transisi yang lebih halus dan gradual, menyerupai karakteristik sistem linear klasik.

2. Efek Memori yang Heterogen
   Dalam sistem ini, setiap variabel memiliki "daya ingat" atau efek heriditas yang tidak seragam terhadap kondisi masa lalunya. Orde α_i yang lebih rendah menyimpan informasi sejarah sistem secara lebih kuat (sifat non-lokalitas tinggi). Hal ini tercermin dalam solusi fungsi Mittag-Leffler, di mana variabel dengan orde kecil akan meluruh lebih lambat dalam jangka panjang (heavy-tailed) dibandingkan variabel dengan orde yang mendekati bilangan bulat.
3. Representasi dalam Domain Laplace
   Secara aljabar, perbedaan α_i menyebabkan polinomial karakteristik pada penyebut solusi domain -s (yaitu det($B(s)$)) memiliki pangkat pecahan yang tidak seragam. Implikasi fisisnya adalah setiap variabel memiliki profil stabilitas dan redaman yang unik. Hal ini memungkinkan model untuk menangkap fenomena di mana satu komponen sistem mungkin mencapai titik kesetimbangan lebih cepat daripada komponen lainnya, meskipun keduanya saling berinteraksi dalam satu matriks sistem A.

Untuk memudahkan melihat perbedaan karakter solusi antar variabel akibat perbedaan orde fraksional, dapat dilihat pada tabel dibawah ini

Tabel 1. Perbedaan Karakter Solusi Antar Variabel Akibat Perbedaan Orde Fraksional

Parameter Analisis	**Orde Rendah (αi→0)**	**Orde Tinggi (αi→1)**
Respon Awal	Sangat cepat / Instan	Gradual / Halus
Efek Memori	Kuat (Non-lokalitas tinggi)	Lemah (Mendekati sifat lokal)
Laju Konvergensi	Meluruh lambat (*Power-law*)	Meluruh cepat (Eksponensial)
Bentuk Solusi	Dominasi fungsi Mittag-Leffler	Mendekati fungsi eksponensial

Dengan menerapkan transformasi Laplace terhadap persamaan (3.11), diperoleh:

$$-x(0) = (-2 - s)X(s) \tag{3.12}$$

dan

$$-s^{-1/2}y(0) = (5 - s^{1/2})Y(s) \tag{3.13}$$

dan

$$-s^{-1/2}z(0) = 4Y(s) + (5 - s^{1/2})Z(s). \tag{3.14}$$

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} -x(0) \\ -s^{-1/2}y(0) \\ -s^{-1/2}z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-s & 0 & 0 \\ 0 & 5-s^{1/2} & 0 \\ 0 & 4 & 5-s^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix}$$

Maka:

$$X(s) = \frac{1}{s+2}x_0.$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh:

$x(t) = \exp(-2t)x_0$

Selanjutnya

$$Y(s) = \frac{s^{-1/2}}{s^{1/2}-5}y_0.$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh:

$$y(t) = E_{\frac{1}{2},1}(5\,t^{1/2})\,y_0$$

Selanjutnya,

$$Z(s) = \frac{4s^{-1/2}}{(s^{1/2}-5)^2}y_0 + \frac{s^{-1/2}}{s^{1/2}-5}z_0.$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh:

$$z(t) = 4\,t^{1/2}\,\frac{d}{dt}\left[E_{\frac{1}{2},1}(5\,t^{1/2})\right]y_0 \;+\; E_{\frac{1}{2},1}(5\,t^{1/2})\,z_0$$

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa transformasi Laplace merupakan pendekatan yang efektif untuk memperoleh solusi analitik sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde fraksional yang berbeda. Dengan mengubah sistem diferensial fraksional menjadi sistem aljabar dalam domain transformasi, solusi dapat diturunkan secara sistematis menggunakan kaidah Cramer dan selanjutnya dinyatakan kembali dalam domain waktu melalui invers transformasi Laplace yang melibatkan fungsi Mittag–Leffler. Secara matematis, hasil penelitian ini memberikan kontribusi berupa formulasi solusi analitik yang terstruktur bagi sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde berbeda, serta memperkaya kerangka teori dalam analisis sistem dinamika fraksional. Metode yang dikembangkan berpotensi diterapkan pada berbagai permasalahan pemodelan yang melibatkan dinamika memori, seperti sistem viskoelastik, anomali difusi, dan sistem kontrol fraksional.
Penyelesaian dari sistem persamaan diferensial fraksional orde berbeda

$$D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

dengan $D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} D_t^{\alpha_1}x_1(t) & D_t^{\alpha_2}x_2(t) & \cdots & D_t^{\alpha_n}x_n(t) \end{bmatrix}^T$, $0 < \alpha_i \leq 1$, dimana $D_t^{\alpha_i}, i = 1,2,\cdots,n$ dengan D_t^{α} adalah operator turunan fraksional Caputo adalah

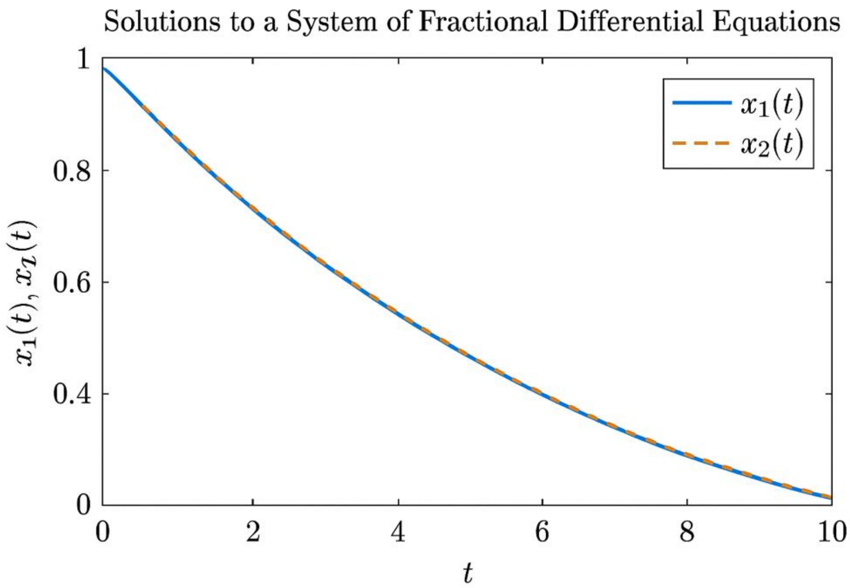
$$x_j(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\det(B_j(s))}{\det(B(s))}\right],\ j = 1,2,\cdots,n.$$

dimana

$$B(s) = \begin{bmatrix} a_{11} - s^{\alpha_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s^{\alpha_2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} - s^{\alpha_n} \end{bmatrix}, \mathbf{L}(s) = \begin{bmatrix} -s^{\alpha_1 - 1} x_1(0) \\ -s^{\alpha_2 - 1} x_2(0) \\ \vdots \\ -s^{\alpha_n - 1} x_n(0) \end{bmatrix} an2$$

dan $B_j(s)$ adalah matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom ke-j dari matriks $B(s)$ dengan vektor L(s).

Pembahasan dalam artikel ini dibatasi pada sistem persamaan diferensial linier dengan turunan pecahan Caputo dan orde pecahan yang memenuhi $0 < \alpha_i \leq 1$. Pengembangan lebih lanjut dapat diarahkan pada kajian sistem nonlinier, orde fraksional yang lebih tinggi, atau penggunaan definisi turunan fraksional lainnya.



Gambar 1. Visualisasi Penyelesaian Masalah Persamaan Linear Orde Berbeda

REFERENSI

Alsulami, M., Al-Mazmumy, M., Alyami, M. A., & Alsulami, A. S. (2024). Generalized Laplace Transform with Adomian Decomposition Method for Solving Fractional Differential Equations Involving ψ-Caputo Derivative. *Mathematics*, *12*(22), 3499.

Bartle. R. G dan Donald. R. Sherbert., 2010. *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. John Wiley and Sons, USA.

Boyce, Diprima, (1997). Elementary diferential Equation and Boundary Value Problem, John Wiley. Canada.

Fallahgoul. A, Sergio. Focardi, Frank. Fabozzi. 2017. *Fractional Calculus and Fractional Processes with Applications to Financial Economics*. Academic Press, Australia.

Jadhav, C. P., Dale, T. B., Chinchane, V. L., Nale, A. B., Thabet, S. T., Kedim, I., & Vivas-Cortez, M. (2024). On solutions of fractional differential equations

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

for the mechanical oscillations by using the Laplace transform. *AIMS Mathematics*, *9*(11), 32629-32645.

Kaczorek, T. 2011. *Selected Problem of Fractional Systems Theory*. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg.

Kadri, I. (2025). A Novel Analytical Solutions for Systems of Fractional Differential Equations using the Conformable Fractional Laplace Transform Method. *Karshi Multidisciplinary International Scientific Journal*, *2*(2), 65-71.

Kontributor Wikipedia. ”Laplace Transform.” *Wikipedia, Ensiklopedia Bebas.* Wikipedia, Ensiklopedia Bebas, 24 Sept. 2020. Web. 24 Sept. 2020.

Milici. Constantin, Gheorghe. D, J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer, Switzerland.