

Kelengkapan Pada Ruang Bernorma Kuasi

Helmi Firdaus^{1*}

¹ Universitas Nurul Huda, Indonesia

*Korespondensi : helmifirdaus@unuha.ac.id

Abstrak

Konsep norma kuasi merupakan generalisasi dari konsep norma pada suatu ruang vektor. Norma kuasi muncul karena terdapat fungsi yang tidak bisa dinyatakan sebagai norma akibat tidak terpenuhi salah satu aksioma norma pada ruang vektor. Berdasarkan hal tersebut, tulisan ini bertujuan untuk membahas tentang sifat-sifat yang ada pada ruang bernorma, seperti konvergen, Cauchy, dan terbatas berlaku pada suatu ruang bernorma kuasi. Lebih lanjut dapat diteliti sifat kelengkapan dari ruang vektor terhadap norma kuasinya. Penelitian menggunakan metode studi literatur dari beberapa buku dan jurnal yang terkait dengan norma dan norma kuasi pada ruang vektor dengan membuktikan beberapa teorema dan memberikan contoh terhadap definisi yang ada di dalam ruang bernorma kuasi. Hasil dari penelitian disimpulkan bahwa ruang bernorma kuasi merupakan ruang yang lengkap terhadap norma kuasinya. Pada akhir tulisan ini diberikan suatu lema yang menjeleaskan tentang kombinasi linear pada ruang bernorma kuasi.

Kata kunci: Ruang Vektor, Ruang Bernorma Kuasi, Kelengkapan.

PENDAHULUAN

Konsep norma merupakan salah bagian kajian yang dipelajari tentang pendefinisian dari suatu ruang vektor ke suatu bilangan real positif (Kreyszig, 1978). Dalam tulisannya tersebut bahwa untuk suatu ruang vektor V atas lapangan \mathbb{R} dan θ vektor nol dari V , fungsi $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}$ disebut norm jika untuk setiap $x, y \in V$ serta scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi 4 aksioma yaitu $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, dan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Penelitian tentang ruang bernorma telah menjadi salah satu topik yang penting dalam analisis fungsional, yang mempelajari ruang vektor terhadap operator linier. Namun tidak semua ruang vektor memenuhi aksioma pada ruang bernorma. Hyers (1939) menjelaskan konsep norma kuasi melalui konsep norma pada ruang vektor yang mengganti aksioma keempatnya yaitu $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dengan $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ dengan nilai $K \geq 1$ untuk setiap x, y dari V dengan V ruang vektor atas lapangan \mathbb{R} . Jika nilai $K = 1$, maka disebut norma tetapi jika nilai $K > 1$ maka disebut norma kuasi. Penelitian lanjutan dari norma kuasi juga dibahas oleh beberapa peneliti yaitu Aoki (1942), serta Rano dan Bag (2014) yang dilakukan secara terpisah yang membahas norma kuasi yang bukan norma pada suatu ruang vektor.

Hal ini yang menimbulkan konsep perumuman dari norma sehingga semua ruang vektor bisa diselidiki karekteristiknya, khususnya pada sifat kelengkapannya. Lebih lanjut dari Hyers (1939) bahwa ruang bernorma kuasi merupakan generalisasi dari ruang bernorma yang mengendurkan beberapa syarat norma untuk memungkinkan pembelajaran lebih lanjut tentang

perilaku fungsi dalam konteks yang lebih luas. Studi tentang kelengkapan dalam ruang bernorma kuasi menekankan pentingnya memahami kondisi di mana setiap deret Cauchy konvergen, yang dibahas juga pada ruang bernorma yang dibahas oleh Kreyszig (1978). Lebih lanjut dari penelitian sebelumnya, Banach (1932) menyatakan bahwa kelengkapan juga merupakan ruang Banach dalam konteks ruang bernorma klasik, di mana setiap deret Cauchy memiliki limit di dalam ruang tersebut.

Pemahaman tentang kelengkapan dalam ruang bernorma kuasi penting untuk berbagai aplikasi dalam analisis fungsional dan teori operator, serta dalam penerapan praktis seperti pemecahan persamaan diferensial dan pemrograman matematis. Penelitian terdahulu seperti Kalton (1985) dan Saphory dan Delfi (2007) yang secara terisah menyoroti beberapa karakteristik unik dari ruang bernorma kuasi, seperti pengaruh konstanta norma kuasi terhadap struktur ruang dan konvergensi deret. Namun, masih ada banyak aspek yang perlu dieksplorasi lebih lanjut, termasuk kondisi yang lebih spesifik untuk kelengkapan dan bagaimana struktur ini berinteraksi dengan operator linier dan non-linier.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk memperdalam pemahaman tentang kelengkapan dalam ruang bernorma kuasi dengan mengeksplorasi syarat-syarat yang lebih spesifik dan implikasinya terhadap struktur ruang dan aplikasi yang lebih luas. Dengan demikian, hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan terhadap teori ruang bernorma kuasi dan membuka jalan bagi aplikasi yang lebih luas dalam analisis matematis dan ilmu terapan.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian yang dimaksudkan adalah melengkapi bukti dan memberikan contoh terkait ruang bernorma kuasi dengan menggunakan penelitian yang sudah ada sebelumnya. Lebih lanjut, penelitian menekankan pada penelitian Rano dan Bag (2014) yang sudah meneliti tentang ruang bernorma kuasi, namun tidak secara spesifik membahas tentang kelengkapan pada ruang bernorma kuasi. Untuk dapat memahami kelengkapan pada ruang bernorma kuasi digunakan konsep dasar seperti konsep konvergen, Cauchy, himpunan terbatas, serta kelengkapan itu sendiri.

Adapun untuk tahapan yang diteliti adalah mempelajari definisi dari ruang bernorma kuasi beserta contoh ruang bernorma kuasi. Setelah itu, dibahas hubungan antara ruang bernorma kuasi dengan ruang bernorma. Kemudian dibahas tentang sifat dan hubungan antara barisan konvergen, barisan Cauchy, himpunan terbatas, dan kelengkapan di dalam ruang bernorma kuasi. Selanjutnya juga diteliti dari Firdaus (2021) yang memberikan lema terkait kombinasi linear pada ruang bernorma yang menjadi bahan pembuktian pada penelitian ini. Berdasarkan tahapan tersebut, penulis mengambil kesimpulan tentang kelengkapan dari ruang bernorma kuasi dengan beberapa syarat yang

harus dipenuhi dan bisa menjadi landasan untuk digunakan sebagai dasar penelitian berikutnya.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

1. Ruang Bernorma Kuasi

Pada bagian ini diberikan definisi dari ruang bernorma kuasi beserta beberapa contoh dari ruang bernorma kuasi. Lebih lanjut diberikan contoh ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.

Definisi 1.1. (Hyers, 1939) Diberikan X ruang vektor atas lapangan \mathbb{R} dan θ adalah vektor nol di dalam X . Fungsi bernilai real $|\cdot|_q$ pada X yang memenuhi

- (i) $|x|_q \geq 0$ untuk setiap $x \in X$,
- (ii) $|x|_q = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$,
- (iii) $|\lambda x|_q = |\lambda||x|_q$ untuk setiap $x \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (iv) terdapat suatu konstanta $K \geq 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$|x + y|_q \leq K\{|x|_q + |y|_q\}$$

disebut norma kuasi pada X . Pasangan $(X, |\cdot|_q)$ disebut ruang bernorma kuasi.

Berikut di bawah ini diberikan contoh ruang bernorma kuasi.

Contoh 1.2. Pasangan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ dengan $|x|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma kuasi.

Bukti. Cukup jelas bahwa syarat dari (i) – (iii) berlaku. Selanjutnya dibuktikan untuk syarat (iv). Diambil sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}})\right)^2 \\ &\leq 2\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= 2(|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2}). \end{aligned}$$

Terdapat $K = 2$ sehingga memenuhi $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} \leq K(|x_i|_{q^2} + |y_i|_{q^2})$ untuk setiap $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dengan kata lain, pasangan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ dengan $|x|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma kuasi. ■

Berdasarkan definisi di atas, didapatkan bahwa ruang bernorma merupakan ruang bernorma kuasi. Adapun untuk arah sebaliknya belum tentu berlaku. Berikut contoh yang menjelaskan bahwa ruang bernorma kuasi belum tentu ruang bernorma.

Contoh 1.3. Contoh 1.2 merupakan ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.

Bukti. Diandaikan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ merupakan ruang bernorma, maka terdapat suatu $K = 1$ sehingga $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} \leq K\{|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2}\}$ untuk setiap $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Dipilih $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$ dan $\vec{y} = (0, 1, \dots, 0)$. Diperoleh bahwa $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} = 4$ dan $|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2} = 2$. Dengan kata lain, $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} > |\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2}$. Kontradiksi. ■

Secara umum, fungsi norma kuasi merupakan fungsi yang tidak kontinu. Norma kuasi merupakan fungsi kontinu jika norma kuasi merupakan norma pada ruang vektornya. Berikut contoh norma kuasi yang tidak kontinu.

Contoh 1.4. Diberikan \mathbb{R}^2 ruang vektor serta $|\cdot|_q$ fungsi pada \mathbb{R}^2 dengan

$$|\vec{x}|_q = \begin{cases} \frac{1}{2}|x_1|, & \text{untuk } x_2 = 0 \\ |x_1| + |x_2|, & \text{untuk } x \neq 0 \end{cases}$$

untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Fungsi $|\cdot|_q$ merupakan norma kuasi pada \mathbb{R}^2 tetapi tidak kontinu pada \mathbb{R}^2 .

Bukti. Cukup jelas bahwa fungsi $|\cdot|_q$ merupakan norma kuasi dengan $K = 2$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $|\cdot|_q$ bukan fungsi kontinu pada \mathbb{R}^2 . Diambil suatu barisan (x_n) di dalam \mathbb{R}^2 dengan $\vec{x}_n = (1, \frac{1}{n})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $\vec{x} = (1, 0)$. Jelas bahwa (\vec{x}_n) konvergen ke \vec{x} karena untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $n \geq N$ berlaku

$$|\vec{x}_n - \vec{x}|_q = \left| \left(1, \frac{1}{n}\right) - (1, 0) \right|_q = \left| 0, \frac{1}{n} \right|_q = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} < \delta.$$

Namun, barisan $(|\vec{x}_n|_q)$ tidak konvergen ke $|\vec{x}|_q$ karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{x}_n|_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

sedangkan $|\vec{x}|_q = \frac{1}{2}$. Dengan kata lain, fungsi $|\cdot|_q$ tidak kontinu pada \mathbb{R}^2 . ■

Konstanta K pada definisi 1.1 mempunyai sifat yang berlaku secara umum untuk setiap ruang bernorma kuasi. Teorema berikut di bawah ini menjelaskan tentang sifat tersebut.

Teorema 1.5. Jika $(X, |\cdot|_q)$ merupakan ruang bernorma kuasi dengan nilai konstanta K , maka

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|_q \leq K^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_q \right)$$

untuk setiap $x_i \in X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Pembuktian cukup jelas dengan menggunakan metode induksi matematika.

2. Konvergen, Cauchy, dan Terbatas Ruang Bernorma Kuasi

Pada bagian ini dibahas mengenai sifat pada ruang bernorma kuasi yang terkait dengan konvergen, Cauchy, dan terbatas. Untuk bagian awal, dibahas konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang bernorma kuasi berturut-turut dalam definisi di bawah ini.

Definisi 2.1. (Rano dan Bag, 2015) Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi serta barisan (x_n) di dalam X .

- (i) Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x|_q = 0$, yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x|_q < \epsilon$.
- (ii) Barisan (x_n) disebut barisan Cauchy jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_m|_q = 0$, yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_m|_q < \epsilon$.

Berikut diberikan contoh barisan konvergen dan barisan Cauchy yang dijelaskan di bawah ini.

Contoh 2.2. Diberikan ruang bernorma kuasi $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{q^2})$ dengan definisi fungsi dari $|\cdot|_{q^2}$ sebagaimana yang diberikan pada contoh 1.2. Barisan (x_n) di dalam \mathbb{R}^2 dengan definisi $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan yang konvergen ke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ sekaligus barisan Cauchy.

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Bagian pertama akan dibuktikan barisan konvergen ke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Diperhatikan bahwa $\frac{2}{\epsilon} \in \mathbb{R}$, sehingga menggunakan sifat Archimedean terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq n_0$ dengan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|\vec{x} - (0,0)|_{q^2} = \left(\sqrt{\left|\frac{1}{n}\right|} + \sqrt{\left|\frac{2}{n}\right|} \right)^2 < \left(2 \sqrt{\left|\frac{2}{n}\right|} \right)^2 = 4 \cdot \frac{2}{n} \leq 4 \cdot \frac{2}{n_0} < 4\epsilon$$

Terbukti (\vec{x}_n) konvergen ke $(0,0)$. Untuk bagian kedua dibuktikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy. Analog dengan bagian pertama bahwa menggunakan sifat Archimedean, untuk $m, n \geq n_0$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} |\vec{x}_n - \vec{x}_m|_{q^2} &= \left(\sqrt{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|} + \sqrt{\left|\frac{2}{n} - \frac{2}{m}\right|} \right)^2 \leq \left(\sqrt{\left|\frac{2}{n_0}\right|} + \sqrt{\left|\frac{4}{n_0}\right|} \right)^2 \\ &= (2 + \sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{n_1} \end{aligned}$$

Karena $\frac{2}{n_0} < \epsilon$ maka diperoleh bahwa $|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_{q^2} < (2 + \sqrt{2})^2 \epsilon$

Terbukti (\vec{x}_n) barisan Cauchy.

Berdasarkan definisi 1.6 di atas terdapat hubungan antara sifat konvergen dan Cauchy yang dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan (\vec{x}_n) di dalam X . Jika (\vec{x}_n) konvergen, maka (\vec{x}_n) Cauchy.

Bukti. Diberikan barisan (\vec{x}_n) konvergen ke y , dengan $y \in X$. Artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ dengan $n \in \mathbb{N}$ berlaku bahwa $|\vec{x}_n - y|_q < \epsilon$. Dengan demikian untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $m, n \geq n_0$ berlaku

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_q = |x_m - y + y - x_n| \leq K(|x_m - y| + |y - x_n|) < 2K\epsilon$$

untuk suatu $K \geq 1$. Dengan demikian (\vec{x}_n) barisan Cauchy.

Selanjutnya diberikan teorema berikut ini yang menjelaskan sifat ketunggalan limit dan nilai limit dari sub barisan di dalam ruang bernorma kuasi.

Teorema 2.4. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan barisan (\vec{x}_n) di dalam X .

- (i) Jika nilai limit dari (\vec{x}_n) ada, maka nilai limit barisan (\vec{x}_n) tersebut tunggal.
- (ii) Setiap barisan (\vec{x}_{n_j}) dari (\vec{x}_n) , dengan (\vec{x}_n) barisan yang konvergen, merupakan barisan konvergen dengan nilai limitnya sama dengan nilai limit barisan (\vec{x}_n) .

Bukti. Untuk bagian (i) cukup jelas dengan menggunakan konsep konvergennya. Untuk bagian (ii) dengan menggunakan sifat konvergen dari (\vec{x}_n) serta sifat indeks dari barisan yang merupakan monoton naik maka sub barisan (\vec{x}_{n_j}) konvergen ke nilai yang sama dengan barisan (\vec{x}_n) .

Pada bagian ini, dibahas sifat terbatas pada ruang bernorma dibahas pada definisi berikut beserta contoh.

Definisi 2.5. (Rano dan Bag, 2015) Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan $B \subseteq X$. Himpunan B dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $|x|_q \leq M$.

Contoh. 2.6. Diberikan $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{q^2})$ ruang bernorma kuasi sebagaimana yang diberikan pada contoh Contoh 1.7. Himpunan bagian $W \subset \mathbb{R}^2$ dengan definisi

$$W := \{\vec{w} = (w_1, w_2) : 2 \leq w_1 \leq 3, -2 \leq w_2 \leq 1\}$$

merupakan himpunan terbatas.

Bukti. Cukup jelas jika kita mengambil $M = (\sqrt{|3|} + \sqrt{|-2|})^2$ sehingga untuk setiap $w \in W$ berlaku $|\vec{w}|_{q^2} \leq M$.

Berikutnya diberikan suatu teorema yang membahas hubungan sifat Cauchy dan terbatas pada ruang bernorma kuasi.

Teorema 2.7. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan (x_n) barisan di dalam X . Jika (x_n) barisan Cauchy, maka (x_n) terbatas.

Bukti. Dipilih $\epsilon = \frac{1}{3}$ sehingga ada $n_0 \in \mathbb{N}$ yang selanjutnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_{n_0}|_q < \frac{1}{3}$. Kemudian diperhatikan bahwa $|x_n|_q \leq K (|x_n - x_{n_0}|_q + |x_{n_0}|_q)$, sehingga $|x_n|_q < K (\frac{1}{2} + |x_{n_0}|_q)$ untuk $K \geq 1$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $n \geq n_0$. Selanjutnya dipilih suatu bilangan positif $Q = \max \{ |x_1|_q, |x_2|_q, \dots, |x_{n_0-1}|_q, K (\frac{1}{2} + |x_{n_0}|_q) \}$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n|_q \leq Q$. Terbukti barisan Cauchy (x_n) terbatas.

3. Kelengkapan Ruang Bernorma Kuasi.

Pada bagian ini diberikan sifat dan contoh serta pembuktiannya terkait sifat kelengkapan yang berlaku pada ruang bernorma kuasi yang disajikan dalam teorema berikut.

Definisi 3.1. (Rano dan Bag, 2015) Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi. Ruang bernorma kuasi $(X, |\cdot|_q)$ dikatakan lengkap, jika untuk setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen di dalam X .

Berikut contoh serta dari pembuktiannya dari ruang bernorma kuasi lengkap.

Contoh 3.2. Ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}} = \{ \vec{x} = (x_n) : x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} < \infty \}$ terhadap norma kuasi $|\vec{x}|_{q, \frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \ell^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang bernorma kuasi lengkap.

Bukti. Jelas bahwa ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang bernorma kuasi dengan konstanta $K = 2$. Selanjutnya dibuktikan untuk sifat kelengkapannya. Diambil sebarang barisan Cauchy (\vec{x}_n) di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian, untuk sebarang $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, berlaku bahwa

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_{q, \frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < \epsilon$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $|x_n^j - x_m^j| < \epsilon$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $m, n \geq N$. Dengan kata lain untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, barisan (x_n^j) merupakan barisan Cauchy di dalam \mathbb{R} . Karena \mathbb{R} lengkap, maka barisan (x_n^j) konvergen di dalam \mathbb{R} atau untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, terdapat $y^j \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j = y^j$. Selanjutnya dibentuk barisan bilangan real $\vec{y} = (y^j)$. Kemudian dibuktikan bahwa $\vec{y} = (y^j) \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Diperhatikan bahwa dari (\vec{x}_n) Cauchy, maka barisan (\vec{x}_n) merupakan barisan terbatas berdasarkan teorema 2.7. Dengan kata lain terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|\vec{x}_n|_{q, \frac{1}{2}} \leq M$

atau $\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j|^{\frac{1}{2}} < M^{\frac{1}{2}}$. Jika diambil nilai limit untuk n menuju tak hingga diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j|^{\frac{1}{2}} < \lim M^{\frac{1}{2}}$. Akibatnya diperoleh $\sum_{j=1}^{\infty} |y^j|^{\frac{1}{2}} < M^{\frac{1}{2}} < \infty$

atau $(y^j) \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian $\vec{y} \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Berikutnya ditunjukkan jika (\vec{x}_n) konvergen ke \vec{y} di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Diperhatikan dari pertidaksamaan untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < \epsilon.$$

Dengan demikian untuk $m \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\epsilon > \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - y^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = |\vec{x}_n - \vec{y}|_{q, \frac{1}{2}}.$$

Dengan kata lain, (\vec{x}_n) konvergen ke \vec{y} di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(\ell^{\frac{1}{2}}, |\cdot|_{q, \frac{1}{2}})$ lengkap.

Selanjutnya, dibahas lema dari Firdaus (2021) yang menjelaskan tentang kombinasi linear di dalam ruang bernorma kuasi dan dibahas dengan pembuktian.

Lema 3.3 Diberikan ruang bernorma kuasi $(X, |\cdot|_q)$. Jika $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ himpunan vektor yang saling bebas linear di dalam X , maka terdapat $R > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap skalar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q \geq R(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)$$

Bukti. Didefinisikan bahwa $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|$ dan $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ himpunan bebas linear di dalam X . Terdapat 2 kemungkinan untuk s .

1. Jika $s = 0$, maka $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0$. Diperoleh $\lambda_i = 0$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Berdasarkan sifat norma kuasi pada X , diperoleh

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q &\geq 0 \\ &= C \cdot 0 \\ &= C \cdot s \\ &= C \cdot (|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|) \end{aligned}$$

untuk setiap $C > 0$.

2. Jika $s > 0$, maka $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0$. Dari pertidaksamaan

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q \geq R(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)$$

jika masing-masing ruas dibagi s , diperoleh

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q \geq R \left(\frac{|\lambda_1|}{s} + \frac{|\lambda_2|}{s} + \dots + \frac{|\lambda_n|}{s} \right).$$

Diperhatikan dari $\frac{|\lambda_1|}{s} + \frac{|\lambda_2|}{s} + \dots + \frac{|\lambda_n|}{s} = 1$, sehingga berlaku

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q \geq R.$$

Dimisalkan $\beta_i = \frac{\lambda_i}{s}$ untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Diperoleh $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$ serta

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q = |\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n|_q \geq R.$$

Dengan demikian, hanya dibuktikan bahwa terdapat $R > 0$ sehingga pertidaksamaan di atas berlaku untuk setiap $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dengan $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$. Didandaikan tidak $R > 0$ yang memenuhi, maka untuk setiap $R > 0$, terdapat scalar-skalar $\beta_1^R, \beta_2^R, \dots, \beta_n^R$ dengan sifat $\sum_{i=1}^n |\beta_i^R| = 1$ sehingga $|\beta_1^R x_1 + \beta_2^R x_2 + \dots + \beta_n^R x_n|_q < R$. Akibatnya, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ terdapat skalar $\beta_1^m, \beta_2^m, \dots, \beta_n^m$ sehingga berlaku $|\beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \dots + \beta_n^m x_n|_q < \frac{1}{m}$. Dengan kata lain, terdapat barisan (z_m) dengan $z_m = \sum_{i=1}^n \beta_i^m x_i$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ dan berlaku $\lim_{m \rightarrow \infty} |z_m|_q = 0$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \vec{0}$, dengan $\vec{0}$ elemen nol di dalam X . Diperhatikan untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku $\sum_{i=1}^n |\beta_i^m| = 1$, sehingga $|\beta_i^m| \leq 1$. Dengan demikian untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, diperoleh bahwa barisan (β_i^m) terbatas berdasarkan Definisi 2.5. Karena terbatas di \mathbb{R} , barisan (β_i^m) mempunyai sub barisan (β_i^{1m}) yang konvergen ke $\beta_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{1m} = \beta_i$. Akibatnya, dapat dibentuk sub barisan (z_m) yaitu (z_{1m}) untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ yaitu

$$z_{1m} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{1m} x_i.$$

Diperhatikan bahwa barisan (β_i^{1m}) merupakan barisan terbatas sekaligus konvergen di dalam \mathbb{R} untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dinotasikan sub barisan tersebut adalah (β_i^{2m}) yang konvergen untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ yang konvergen ke nilai yang sama dengan barisan (β_i^{1m}) yaitu β_i untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ berdasarkan Teorema 2.4 bagian (ii). Dengan argument yang sama maka dapat dibentuk sub barisan dari (z_{1m}) yaitu barisan (z_{2m}) dengan setiap $m \in \mathbb{N}$ yaitu

$$z_{2m} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{2m} x_i.$$

Proses dilanjutkan sehingga setelah k langkah diperoleh barisan (z_{km}) yang merupakan sub barisan (z_m) dengan setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$z_{km} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{km} x_i$$

dengan $|\beta_i^{km}| \leq 1$ dan memenuhi $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{km} = \beta_i$ dengan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dengan demikian untuk m menuju tak hingga diperoleh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{km} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i^{km} x_i = \sum_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{km} x_i = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dinotasikan $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = z$. Diperhatikan bahwa $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$, sehingga β_i tidak semuanya bernilai nol. Karena $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ merupakan himpunan vektor bebas linear sehingga diperoleh bahwa nilai $z \neq \vec{0}$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{km} \neq \vec{0}$. Namun diperhatikan bahwa barisan (z_{km}) merupakan sub barisan dari (z_m) yang mempunyai nilai limit bernilai $\vec{0}$ berdasarkan Teorema 2.4 bagian (ii).

Terjadi kontradiksi sehingga pengandaian salah. Dengan demikian diperoleh bahwa terbukti terdapat $R > 0$ sehingga berlaku

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q = |\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n|_q \geq R.$$

Dari kasus 1 dan 2 terbukti, maka Lema 3.3 terbukti benar

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, diperoleh bahwa pada ruang bernorma kuasi dapat dikonstruksikan sifat-sifat yang ada pada ruang bernorma seperti konvergen, Cauchy, dan terbatas. Lebih lanjut, sifat kelengkapan pada ruang bernorma kuasi dapat dibentuk dengan syarat yang sama dengan ruang bernorma. Hal ini membuat ruang bernorma kuasi bisa menjadi generalisasi terhadap ruang bernorma dan juga berlaku sifat-sifat yang telah disebutkan di atas. Adapun terdapat lema dari Firdaus (2021) yang sudah dibuktikan pada penelitian ini mempertegas implikasi sifat bebas linear di dalam ruang bernorma kuasi. Adapun saran untuk peneliti lain yang ingin memperdalam terkait ruang bernorma kuasi antara lain dapat meneliti sifat operator yang dapat didefinisikan serta diselidiki apakah ruang operator pada ruang bernorma kuasi tersebut lengkap atau tidak. Lebih lanjut, dapat mengkonstruksikan fungsional yang nantinya didapat ruang dualnya.

REFERENSI

- Aoki, T., 1942, Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Proceedings of Imperial Academy Tokyo*, 18, 588-594.
- Banach, S., 1932, *Théorie des Opérations Linéaires*, Chelsea, New York.
- Firdaus, H., 2021, Completeness Of Bounded Linear Operations Spaces On Quasi Normed Spaces, *Jurnal Matematika Thales*, 3(2), 1-12.
- Hyers, D.H., 1939, Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Revista de Ciencias*, 41, 555-574.
- Kalton, N., Peck, N., and Roberts, J., 1985, *An F-Space Sampler*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kreyszig, E., 1979, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc., Canada.
- Rano, G., and Bag, T., 2014, Finite Dimensional Quasi-Normed linear spaces, *The Journal of Fuzy Mathematics*, 22(2), 669-676.
- Rano, G., and Bag, T., 2015, Bounded Linear Operators in Quasi-Normed Linear Spaces, *Journal of The Egyptian Mathematical Society*, 23, 303-308.
- Saphory, R.A., and Delfi, J.K., 2007, Quasi-Banach Spaces for the Sequences Spaces ℓ^p where $0 < p < 1$, *Journal of Collage Education*, 3, 285-295.